CR 1899 VOL. 128

de ces équations peut être écrite avec les coordonnées rectangulaires x_1, y_1, z_1 et elle prend la forme

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &y_1^2+z_1^2-bx_1^2-2h(y_1+iz_1)x_1\\ &\quad -2h'(y_1+iz_1)^2-2k(y_1+iz_1)-b=0,\end{aligned}\right.$$

d'où il résulte que (Q) est une quadrique assujettie à la seule condition d'être tangente en un point au cercle de l'infini. C'est le résultat que nous avions annoncé plus haut. »

MÉCANIQUE. — *De l'effet produit, sur le mouvement d'inclinaison d'une bicyclette en marche, par les déplacements latéraux que s'imprime le cavalier.* Note de M. **J. Boussinesq**.

« I. J'ai donné, il y a quelques mois [1], l'équation qui relie le mouvement d'inclinaison d'une bicyclette à son mouvement de progression, dans l'hypothèse d'un cavalier fixé sur sa machine ou, plutôt, n'y exécutant que les deux manœuvres des pédales et du guidon, négligeables au point de vue des inerties exigées par leur production. Or, en réalité, le cavalier a besoin, dans les *virages*, c'est-à-dire toutes les fois qu'il quitte un chemin rectiligne pour s'engager sur une trajectoire courbe, de se pencher du côté de la concavité de cette trajectoire; et il y a lieu d'admettre que le centre de gravité du système, situé à une distance h, ordinairement constante, de la base a de la bicyclette, et presque confondu avec celui du corps du bicycliste, sort alors du plan médian du cadre pour s'en éloigner de petites distances λ, en se portant vers le centre de la courbure $\frac{1}{R}$ de la trajectoire à décrire sur le sol.

» Les petites déformations que s'imprime à cet effet le cavalier, et les variations, plus ou moins complexes, qui en résultent généralement pour l'angle θ d'inclinaison du plan médian du cadre par rapport à la verticale, ont des effets en grande partie faciles à prévoir et à exprimer analytiquement, si l'on admet que ces mouvements du cavalier sur la bicyclette soient rapides, ou comme instantanés, et séparés par des intervalles relativement longs, durant lesquels il restera fixé à la machine.

---

[1] *Comptes rendus*, t. CXXVII, p. 843; 28 novembre 1898. Voir aussi le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. V, p. 117.

» II. Produits alors par de vives actions et réactions intérieures au système, les mouvements dont il s'agit auront, d'une part, assez peu de durée, pour que l'on puisse y négliger la progression de la bicyclette sur le sol, et, d'autre part, trop peu d'amplitude dans le sens vertical, pour que le travail de la pesanteur y soit sensible. Ils se réduiront ainsi à des rotations de la bicyclette autour de sa base, avec rotations inverses du cavalier accompagnées de déformations; et la loi de la conservation des aires les régira.

» Le cavalier, pour y opérer un petit transport définitif λ du centre de gravité de tout le système hors du plan médian du cadre, pourra, par exemple, y imprimer successivement à ce plan médian deux rotations égales et contraires, qui nécessiteront deux rotations inverses et à aires équivalentes de l'ensemble de son corps. S'il a soin d'abaisser ou de plier un peu celui-ci, pendant sa rotation dirigée vers le centre de la courbure $\frac{1}{R}$ qu'il veut donner à la trajectoire, et, au contraire, de l'élever ou l'étendre durant la rotation inverse, les aires correspondant à la première rotation, décrites par des rayons vecteurs moindres, constitueront des secteurs plus ouverts, ou de plus grand angle, que les aires décrites dans le sens rétrograde; en sorte que, lorsque le cadre aura retrouvé sa première inclinaison θ sur la verticale, le cavalier conservera, par rapport au plan médian, une partie de son déplacement latéral. Et, par suite, le centre de gravité général du système se trouvera bien à une petite distance voulue λ de ce plan médian.

» Nous admettrons d'ailleurs que le cavalier ait repris sa première forme et sa première distance h à l'axe a, afin que la loi des aires donne alors à l'ensemble la même vitesse de rotation $\frac{d\theta}{dt}$ qu'avant la rapide perturbation subie. Sans cela, il y aurait bien (dans l'hypothèse, nullement indispensable, que nous faisons ici pour plus de simplicité) conservation de l'inclinaison θ du cadre, mais non de sa dérivée, dont le changement serait, il est vrai, insignifiant, vu la petitesse supposée de la déformation subie du système.

» Le cavalier restant dès lors fixe sur la selle, les coordonnées relatives b, h, λ du centre de gravité par rapport au cadre persisteront, jusqu'à ce qu'il juge devoir retrouver, par une manœuvre inverse non moins rapide, sa primitive disposition où λ était nul, ou jusqu'à ce qu'il préfère en adopter une nouvelle.

» III. Il importe d'observer que les deux rotations rapides du cadre, égales et contraires, dont il vient d'être question, n'ont rien d'obligé. Elles ne constituent que la manière probablement la plus simple de concevoir comment le centre de gravité du système peut sortir, presque brusquement, du plan médian, sans que l'inclinaison θ de celui-ci, ni sa vitesse d'inclinaison $\frac{d\theta}{dt}$, soient, en définitive, modifiées. Le même but pourrait être atteint par des déformations du système qui n'altéreraient la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$, ni, par suite (vu la brièveté du phénomène), l'inclinaison θ, à aucun moment de la perturbation.

» En effet, représentons-nous, exprimées en fonction du temps t, les coordonnées relatives de chaque point matériel du système par rapport au plan médian du cadre, coordonnées définissant la configuration de l'ensemble et appelées i, j, l dans le travail cité plus haut, où elles sont comptées à partir d'un point G qui figurera maintenant, sur le plan médian, non plus le centre de gravité, mais seulement sa situation *habituelle*. Alors, si l'on donne les fonctions i, j, l, le système pourra être construit à tout instant t, pourvu que la place de la base a sur le sol et l'inclinaison θ du plan médian y soient connues. La situation actuelle, à l'époque t, de la base a dépend du mouvement de progression, c'est-à-dire de la vitesse V du bas de la roue motrice et du rayon de courbure R de sa trajectoire, fonctions de t censées à la disposition du cavalier (grâce aux pédales et au guidon). Il suffit ainsi de déterminer les variations successives de θ, et, à cet effet, de former une équation du mouvement d'où soient éliminées à la fois les réactions du sol et les actions intérieures.

» Or l'équation des moments, par rapport à la droite du sol qui coïncide présentement avec la base a, est justement dans ce cas. Elle sera donc la *seule* équation différentielle du mouvement à faire vérifier par les coordonnées, dans l'espace, des points du système. Mais il est naturel qu'on puisse y satisfaire, pendant le court intervalle de temps où i, j, l sont variables, aussi bien en faisant changer convenablement ces innombrables coordonnées relatives i, j, l, et en posant $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, qu'en y faisant, au contraire, varier $\frac{d\theta}{dt}$. Et le problème restera très indéterminé, vu la multitude des inconnues i, j, l, si l'on ajoute la condition que le centre de gravité du système éprouve en même temps tel petit déplacement relatif qu'on voudra, notamment le petit écart désiré λ d'avec le plan médian du cadre. Ainsi, le cavalier doit pouvoir, de bien des manières, déplacer le centre de gravité du système par rapport au plan médian, sans altérer le mouvement actuel de celui-ci.

» IV. Voyons maintenant quelle loi régit le mouvement durant les intervalles de temps, relativement longs, où λ, devenu différent de zéro, ne varie pas.

» Le bras de levier du poids mg de tout le système, c'est-à-dire la distance de cette force à la base a de la bicyclette, n'est plus $h\sin\theta$, mais, évidemment, $h\sin\theta + \lambda\cos\theta$, ou, sensiblement, $h\theta + \lambda$; et, malgré la petitesse du déplacement latéral λ, le moment

$$mg(h\theta + \lambda) \tag{1}$$

du poids se trouve ainsi changé dans un rapport notable, car θ et $h\theta$ sont petits aussi. Au contraire, les autres termes de l'équation des moments, termes dus, en somme, à des inerties où la direction de la verticale ne joue aucun rôle, gardent très sensiblement leurs expressions relatives au cas $\lambda = 0$; car la configuration de l'ensemble est restée à peu près la même. Et leur valeur totale approchée est encore

$$-mh\left(h'\frac{d^2\theta}{dt^2} + b'\frac{d\frac{V}{R}}{dt} + \frac{V^2}{R}\right), \tag{2}$$

où V désigne la vitesse de progression de la bicyclette sur le sol, h' la longueur du pendule formé par le système autour de la base a, et b' la constante, peu différente de b, que définit la formule (6) de la Note citée.

» La somme des deux expressions (1) et (2) étant nulle, on aura donc, en divisant par mhh', l'équation du mouvement, à *cinq* termes,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b'}{h'}\frac{d\frac{V}{R}}{dt} = \frac{g}{h'}\theta - \frac{V^2}{h'R} + \frac{g}{h'}\frac{\lambda}{h}. \tag{3}$$

» Le déplacement latéral, λ à très peu près, que s'est donné le cavalier sur sa machine ajoute le cinquième terme. Et l'on voit que ce terme, au moment d'un virage, est très propre, en l'absence de toute courbure actuelle $\frac{1}{R}$ de la trajectoire, et à partir d'un état de verticalité parfaite du cadre, à faire naître précisément l'inclinaison positive θ qui motivera une manœuvre du guidon déviant la trajectoire du côté voulu.

» Cet effet se produirait, d'ailleurs, quand bien même la perturbation initiale, qui a produit l'écart λ, n'aurait pas conservé la verticalité du cadre, ou aurait altéré θ, pourvu qu'elle eût suffi à faire sortir du plan vertical de l'axe a le centre de gravité du système, dans le sens indiqué.

» L'hypothèse que j'ai faite de la constance (au moins en moyenne) de la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$ pendant chaque perturbation n'est donc pas nécessaire. Elle offre seulement l'avantage de simplifier le plus possible la transition d'un intervalle à l'autre et, par suite, le calcul de θ.

» V. En résumé, la fonction arbitraire qui doit généralement exprimer, dans l'équation du mouvement de la bicyclette, l'influence des déplacements que s'imprime le cavalier sur la selle, est réduite ici à une suite de valeurs λ constantes, figurant seules, chacune à son tour, dans un cinquième terme de l'équation. Ce terme tend donc à devenir une petite fonction arbitraire du temps, quand les époques des déplacements spontanés du bicycliste se rapprochent de plus en plus. Et l'on peut admettre que les mouvements *moyens* du cadre se confondent alors, sensiblement, avec ce qu'ils seraient sous une certaine action continue du cavalier, savoir, une action donnant lieu aux mêmes écarts successifs λ du centre de gravité du système, à droite ou à gauche du plan médian du cadre, et conservant sans cesse l'expression (2) au moment total des inerties, grâce à des déformations appropriées.

» Du reste, dès que l'action du cavalier devient continue, la petitesse et la lenteur de ces déformations suffisent évidemment, par elles-mêmes, à assurer au moment total des inerties l'expression approchée (2), sauf peut-être dans des cas très exceptionnels. L'équation du mouvement sera dès lors (3), avec θ continu, et il suffira que la suite voulue des écarts λ du centre de gravité se produise effectivement.

» Mais la manière dont le bicycliste devra s'y prendre, pour les réaliser ainsi avec continuité, reste obscure; et c'est par une expérimentation confuse ou de sentiment, comme, d'ailleurs, presque toutes celles d'où sont dérivées nos habitudes premières, qu'il en apprendra la manœuvre ou, plus généralement, qu'il parviendra à régler, d'après les circonstances, la fonction arbitraire par laquelle s'exprime, dans l'équation du mouvement, l'effet de ses déplacements d'ensemble sur la selle.

» Quoi qu'il en soit, l'action totale du cavalier se traduit, on le voit, par trois fonctions arbitraires V, R et λ du temps, en rapport, respectivement, avec les trois manœuvres : 1° des pédales, d'où dépend la vitesse V de progression; 2° du guidon, d'où dépend le rayon R de courbure de la trajectoire; et 3° de l'ensemble du corps sur la selle, d'où dépend le transport, à un moment donné, du centre de gravité du système à droite ou à gauche du plan médian du cadre, pouvant se faire sans que l'inclinaison θ du plan et sa dérivée première $\frac{d\theta}{dt}$ cessent de varier graduellement.

» Cette multiplicité des moyens d'action d'un cavalier un peu expérimenté explique la facilité relative de l'usage de la bicyclette. Le troisième moyen, employé avec une habileté suffisante, doit permettre, en particulier, de suivre sans déviation appréciable un chemin même *rectiligne*, sur lequel la valeur infinie du rayon R rend illusoires les deux premiers, en faisant évanouir les termes de l'équation (3) où figurent V et R. Ce troisième moyen, surtout avec l'aide d'un balancier facilitant les déplacements latéraux λ, suffit bien au funambule, qui n'a guère, lui aussi, comme le bicycliste, que deux points d'appui (et pas d'une manière continue), sur son chemin de corde si étroit et si peu ferme. »

PHYSIQUE. — *Note sur quelques propriétés du rayonnement de l'uranium et des corps radio-actifs;* par M. **Henri Becquerel**.

« Depuis la dernière Note que j'ai présentée à l'Académie, au mois d'avril 1897, sur le rayonnement de l'uranium, divers travaux importants ont été publiés sur cette question. Je rappellerai seulement ceux de Lord Kelvin, de MM. Beattie et Smoluchowski, de M. Rutherford, sur l'uranium, de M. Schmidt qui a reconnu, dans le thorium, des propriétés analogues à celles de l'uranium, et enfin les belles recherches de M. et Mme Curie, qui ont abouti à la découverte de deux matières nouvelles, le polonium et le radium, considérablement plus actives que l'uranium.

» Je me propose de résumer aujourd'hui les résultats que l'on peut déduire de l'examen de plusieurs centaines de clichés photographiques obtenus depuis trois ans, et qui montrent combien ce phénomène de rayonnement est complexe.

» Parmi les propriétés que j'ai signalées au début de mes recherches comme caractérisant ce rayonnement inconnu jusque-là, il en est trois fondamentales qui ont été vérifiées depuis par tous les observateurs; ce sont : la spontanéité du rayonnement, sa permanence et la propriété de rendre les gaz conducteurs de l'électricité.